

Câu 1 (a) Chứng minh rằng với mọi $x_1, x_2 \in (e, +\infty)$ mà $x_1 < x_2$, ta có :

$$\frac{\ln x_1}{x_1} > \frac{\ln x_2}{x_2}.$$

(b) Chứng minh bất đẳng thức: $2009^{2010} > 2010^{2009}$.

Câu 2 Cho $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} f(1) = \frac{2009}{6} \\ \frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2} + \dots + \frac{f(n)}{n} = \frac{n+1}{2} f(n) \end{cases}$$

(a) Hãy biểu diễn $f(n)$ qua $f(n-1)$

(b) Tìm giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2009 + n)f(n)$

Câu 3 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 + 6x_1 = 2 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 5x_1 + 6x_2 = 3 \\ x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4 \\ x_5 + 2x_6 + 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 5 \\ x_6 + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 6 \end{cases}$$

Câu 4 Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ dương, liên tục, f tăng, g giảm trên $[0, 1]$.

Chứng minh rằng :
$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \int_0^1 f(x)g(1-x)dx$$

Câu 5 (a) Cho đa thức $f(x) = x^{2009} + ax^2 + bx + c$.

Tìm các số thực a, b, c sao cho $f(x)$ chia hết cho $g(x) = x - 2$ và $f(x)$ chia cho $h(x) = x^2 - 1$ thì dư $r(x) = 2x$.

(b) Trên bảng có 2009 dấu trừ và 2010 dấu cộng tại các vị trí bất kỳ. Ta thực hiện mỗi lần xóa hai dấu bất kỳ thì viết thêm vào đó một dấu cộng nếu xóa hai dấu giống nhau hoặc một dấu trừ nếu xóa hai dấu khác nhau. Hỏi sau khi thực hiện 4018 lần xóa như trên thì trên bảng còn lại dấu gì?

Câu 1 (a) Chứng minh rằng: $e^t > 1 + t, \quad \forall t > 0$.

(b) Chứng minh rằng: $I = \int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx > \frac{3\pi}{2}$.

Câu 2 Cho $a > 0$. Xét dãy số $\{u_n\}$ được xác định bởi:

$$u_1 = \sqrt{a}; u_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}; u_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}; \dots u_n = \sqrt{a + \underbrace{\sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}_{n \text{ căn số}}}.$$

(a) Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ là dãy số dương, tăng và bị chặn trên.

(b) Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Câu 3 Cho ba số a, b, c thỏa mãn:
$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có: $a^n + b^n + c^n = 1$.

Câu 4 Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/2} [\cos^2(\sin x) + \sin^2(\cos x)] dx$.

Câu 5 (a) Cho các đa thức với hệ số thực $f(x), g(x)$ thỏa mãn:

$$F(x) = f(x^{2010} + 2009) + x.g(x^{2010} + 2009) \text{ chia hết cho } x^2 + x + 1.$$

Gọi α, β là hai nghiệm phức của phương trình $x^2 + x + 1 = 0$. Hãy chứng minh rằng $\alpha^3 = \beta^3 = 1 = \alpha^{2010} = \beta^{2010}$; từ đó suy ra rằng

$$f(2010) = g(2010) = 0.$$

(b) Bạn An có 3 mảnh giấy. Từ 3 mảnh giấy này, bạn An lấy ra một mảnh rồi xé nó thành 3 mảnh. Trong các mảnh giấy có được An lại lấy ra một mảnh rồi lại xé thành 3 mảnh nhỏ hơn. Cứ như thế sau một thời gian An dừng lại và đếm được 120 mảnh giấy. Bạn An đã đếm đúng hay sai? Vì sao?

Câu 1 (a) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[-a; a]$, chứng minh rằng:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$$

(b) Tính tích phân: $I = \int_{-1}^1 \frac{x^4 + \sin x}{1 + x^2} dx.$

Câu 2 Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2n+2}{n}u_n - \frac{n+2}{n}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

(a) Chứng minh rằng: $u_n = n.2^n + 1, n = 1, 2, 3, \dots$

(b) Hãy tìm giới hạn: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n (2012n + 2011)}{u_n}.$

Câu 3 Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn

$$\frac{x}{y+z+2011} = \frac{y}{x+z+2011} = \frac{z}{x+y-4022} = x+y+z$$

(a) Chứng minh rằng nếu x, y, z khác 0 thì $x+y+z = \frac{1}{2}$

(b) Tìm ba số x, y, z .

Câu 4 (a) Cho hàm số liên tục $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(0) < 1 < f(1)$. Khi đó chứng tỏ rằng phương trình sau luôn luôn có nghiệm trong $(0; 1)$

$$f(x) - \sin^{2012} x - \cos^{2012} x = 0.$$

(b) Tìm hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(\ln x) = x, \forall x > 0$ và $f(1) = 1$.

Câu 5 (a) Tìm hệ số của x^2 trong khai triển đa thức sau:

$$P_n(x) = (1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx) \text{ với } n \geq 1$$

(b) Trong một cuộc thi Toán, tổng số điểm của Bình và Đông bằng tổng số điểm của An và Chi. Nếu tính tổng số điểm của An và Bình thì sẽ vượt trội hơn tổng số điểm hai người kia. Ngoài ra số điểm của Đông lớn hơn tổng số điểm của Bình và Chi. Hãy xác định thứ hạng của bốn người theo thứ tự điểm từ cao tới thấp, biết rằng điểm thi là số không âm.

Câu 1 Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4026x + 2013.2014$, $x \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ với $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng: $f^{2013}(x) = 2013 + (x - 2013)^{2^{2013}}$

b) Hãy tính tích phân sau: $I = \int_0^1 f^{2013}(x) dx$.

Câu 2 a) Chứng minh dãy số $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} \end{cases}$ là dãy số giảm và bị chặn dưới.

b) Cho dãy $\{x_k\}$ xác định từ hệ thức:

$$x_1 = 1, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{nx_n}; \quad n = 2, 3, \dots \quad \text{Tính } x_{2013}.$$

Câu 3 Giải hệ phương trình sau với a_1, a_2, a_3, a_4 là các số thực khác nhau.

$$\begin{cases} |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 = 1 \end{cases}$$

Câu 4 Tìm hàm số $f(x)$ liên tục sao cho $f(x) = x^2 - \int_0^2 f(x) dx$

Câu 5 (a) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ xyz = 4 \end{cases}$

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{xy + z - 1} + \frac{1}{yz + x - 1} + \frac{1}{zx + y - 1} = \frac{-1}{(x-1)(y-1)(z-1)} = k \quad \text{và tính } k.$$

(b) Trong một buổi sinh hoạt của câu lạc bộ có 100 người tham dự. Trong đó có 85 người mặc áo đỏ, 80 người mang giày đen, 75 người đeo đồng hồ và 70 người đội nón. Hỏi có ít nhất bao nhiêu người thỏa mãn tất cả các điều kiện trên?

Câu 1 (a) Tính nguyên hàm $I = \int \frac{x \ln x + (x-1) \ln(x-1)}{x(x-1)} dx$

(b) Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục và dương với mọi $x > 0$.

Chứng minh rằng $g(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$ là hàm đồng biến trong khoảng $(0, +\infty)$.

Gợi ý: Nếu $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ thì $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Câu 2 Cho $a \in [0;1]$ và dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = 2x_n(1-x_n), \forall n \geq 1 \end{cases}$

(a) Chứng minh rằng $x_n \leq \frac{1}{2}$ với mọi $n > 1$.

(b) Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Câu 3 Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

Câu 4 Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ thỏa mãn $xf(x) + \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2$.

Chứng minh rằng $\int_{1/2}^2 f(x) dx \leq 2 \ln 2$.

Câu 5 (a) Tìm đa thức $P(x)$ có bậc lớn hơn 2 và thỏa mãn $P(2x) = P'(x).P''(x)$.

(b) Hai bạn A và B tiến hành một trò chơi với 2015 hạt đậu, theo cách lấy luân phiên nhau. Mỗi lần có thể lấy khỏi đồng hạt đậu 1, 2 hoặc 3 hạt. Người nào lấy cuối cùng hết đậu trong đồng thì người đó thắng. Tìm chiến thuật của người luôn thắng? Khi nào A là người lấy trước mà B là người thắng, nếu B biết chiến thuật đó?

Câu 1 (a) Sử dụng phép đổi biến $x = a - y$ với a thích hợp để tính tích phân sau

$$I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx$$

(b) Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(1) = -P(0)$.

Chứng minh rằng
$$\int_0^1 P''(x)x(x-1)dx = 2 \int_0^1 P(x)dx$$

Câu 2 Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi công thức $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ với $n = 2, 3, 4, \dots$

Rút gọn tổng $S = u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Từ đó chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} S = \ln \frac{1}{2}$.

Câu 3 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{2}{y+z} - \frac{3}{z+x} = 1 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{2}{y+z} + \frac{3}{z+x} = 1 \\ -\frac{1}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{3}{z+x} = 1 \end{cases}$$

Câu 4 Tìm hàm số $f(x)$ có giá trị lớn hơn 1 và xác định với mọi $x > 0$, biết rằng

$$\left(\frac{f(x)+1}{f(x)-1} \right)^2 = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}.$$

Câu 5 (a) Trong mặt phẳng, một tập hợp gồm 8 đường thẳng song song cắt một tập hợp gồm n đường thẳng song song theo phương khác, tạo thành 420 hình bình hành (nhiều hình có thể phủ hình kia). Hãy tính n .

(b) Có 4 người đàn ông A, B, C, D cần đi qua một chiếc cầu rất yếu trong đêm tối. Không may là chỉ có một cây đuốc, không có đuốc thì không thể qua cầu được. Thời gian qua cầu của A, B, C, D lần lượt là: 1 phút, 2 phút, 7 phút và 10 phút. Mỗi lượt đi chỉ được nhiều nhất 2 người và theo thời gian của người đi nhiều hơn. Hỏi thời gian ngắn nhất để 4 người đàn ông qua cầu là bao lâu?



Ảnh minh họa.

Câu 1 (a) Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{\frac{x}{e^2 + e^x}}$.

(b) Cho hàm số $f(x)$ khả vi và $f(0) = 0$. Sử dụng định nghĩa đạo hàm, chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(2x) + f(3x) + \dots + f(nx)}{x} = \frac{n(n+1)}{2} f'(0)$

Câu 2 Cho dãy số x_n thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 = 2017 \\ \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} = (n + 2018)x_{n+1} \end{cases} \quad \text{Tìm giới hạn } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Câu 3 Cho các số a, b, c, x, y, z thỏa mãn

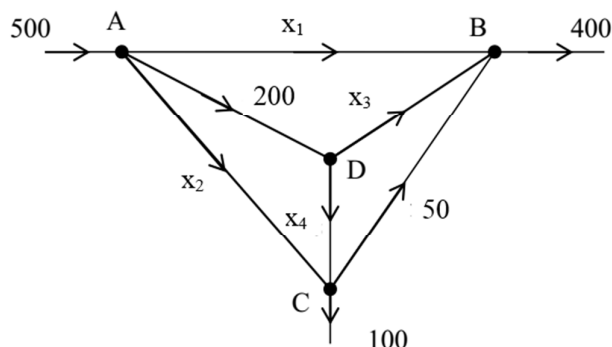
$$\begin{cases} x = by + cz \\ y = ax + cz \\ z = ax + by \end{cases}, \quad \text{với } x + y + z \neq 0 \text{ và } a, b, c \neq -1.$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2$.

Câu 4 Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4} + x - 2}{\sqrt{x^2 + 4} + x + 2}$. Chứng tỏ rằng $f(x)$ là hàm lẻ.

Câu 5 (a) Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn $P(3x) - P(x) = 16x^2 - 10x$. Tìm các hệ số a, b, c để hàm số $f(x) = P(x) - (ax^2 + bx + c)$ thỏa mãn $f(3x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

(b) Cho mạng lưới giao thông một chiều như hình vẽ, với x_1, x_2, x_3, x_4 là lưu lượng xe đi trên các con đường. Số xe đi vào nút A là 500 và đi ra nút B, C lần lượt là 400, 100. Tại mỗi nút của mạng lưới, luôn có tổng lưu lượng xe đi vào bằng xe đi ra. Ngoài ra lưu lượng trên đường AB gấp 4 lần lưu lượng trên đường CD. Tìm lưu lượng xe đi trên mỗi con đường.



Thời gian làm bài : 150 phút.

(b) Cho một mảng hình vuông gồm 4×4 ô vuông. Tại mỗi ô, người ta điền ngẫu nhiên một trong ba số: -1 , 0 hoặc 1 . Tính tổng tất cả các ô theo hàng, theo cột và theo hai đường chéo. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

Câu 1. a) Ký hiệu $\mathbb{R}_*^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Hãy xác định hàm nhận giá trị dương $f(x)$ với tập xác định $\mathbb{R}_*^+$ (tức là $f(x) \in \mathbb{R}_*^+$ với mọi $x \in \mathbb{R}_*^+$) biết rằng:

$$\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} = \left(\frac{\sqrt{f(x)+1}+1}{\sqrt{f(x)+1}-1} \right)^2.$$

b) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x) = 12x^2 f(x^3) - \frac{x^3}{x+1}$.

Hãy tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Câu 2. Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \frac{2n}{(n-1)^2} (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) = \frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng : $x_{n+1} = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3} x_n$ với mọi $n \geq 1$.

b) Chứng minh rằng: $x_n \leq 4(n-1)$ với mọi $n \geq 2$.

Câu 3. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn:
$$\begin{cases} xy + x + y = 15 \\ yz + y + z = 3 \\ zx + z + x = 24 \end{cases}$$
 . Tính $S = x^2 + y^2 + z^2$.

Câu 4. Biết rằng đa thức $P(x)$ chia cho $x-2$ dư 5 và chia cho $x-3$ dư 7. Tìm phần dư của đa thức $P(x)$ khi chia cho $(x-2)(x-3)$.

Câu 5. a) Một nhóm gia đình đi dã ngoại bằng tàu. Mỗi vé tàu sử dụng được cho 5 người lớn. Một trẻ em sử dụng vé bằng $\frac{1}{2}$ vé người lớn. Mỗi người lớn được

mang theo một chú chó miễn phí và từ chú chó thứ 2 thì tính bằng $\frac{1}{3}$ vé người lớn.

Biết rằng họ đã sử dụng hết 4 vé và số chó gấp 3 lần số người và trong nhóm luôn có người lớn. Hỏi tối thiểu sẽ có bao nhiêu con chó được lên tàu cùng nhóm gia đình đó?

b) Nhân dịp niệm 60 năm thành lập Trường Đại học Thủy Lợi, Hội sinh viên tổ chức cắm trại và phần thi được mong chờ nhất là gói và rán bánh chưng. Mỗi đội phải rán chín 12 miếng bánh chưng, miếng bánh chưng được coi là chín khi rán chín 2 mặt to nhất, (trung bình 5 phút rán chín 1 mặt). Biết rằng các đội chỉ được sử dụng chảo “phi 28” do ban tổ chức cấp và chảo loại này chỉ xếp được tối đa 8 miếng bánh chưng cùng một lúc. Coi như trình độ rán bánh của các đội như nhau và chiến thắng thuộc về đội rán xong nhanh nhất. Hỏi đội chiến thắng sẽ mất bao nhiêu phút để hoàn thành việc rán bánh?